

令和8年度 岐阜薬科大学 学力検査問題 数学 解答

1

(1) (略) $S = 20$.

(2) $OA = 2\sqrt{10}$, $OB = 5\sqrt{2}$, $AB = 5\sqrt{2}$ である。

$\triangle OAB$ の面積を 2 通りで考えて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r(OA + OB + AB) &= S \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}r(2\sqrt{10} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) &= 20 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{10} + 5\sqrt{2})r &= 20 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} r &= \frac{20}{\sqrt{10} + 5\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{10}(1 + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{10}(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{5} - 1)}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} \quad \left(r = \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{ も可} \right) \end{aligned}$$

(3) $OB = AB$ より $\triangle OAB$ は二等辺三角形である。

そこで、辺 OA の中点を M とすると、 $M(3, 1)$ であり、 $MB \perp OA$.

$\triangle OAB$ は直線 MB に関して対称なので、 I は線分 MB 上にあり、 $MI = r$ を満たす。

直線 MB の傾きは -3 なので、 $\vec{MI} = k(-1, 3)$ ($k > 0$) と表せる。

このとき $|\vec{MI}| = k\sqrt{10}$ なので、

$$|\vec{MI}| = r \Leftrightarrow k\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{5} - 1)}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

したがって

$$\vec{OI} = \vec{OM} + \vec{MI} = (3, 1) + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(-1, 3) = \left(\frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

$$\text{答: } I \left(\frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

(3) <別解>

直線 BI と直線 OA の交点を M とする。

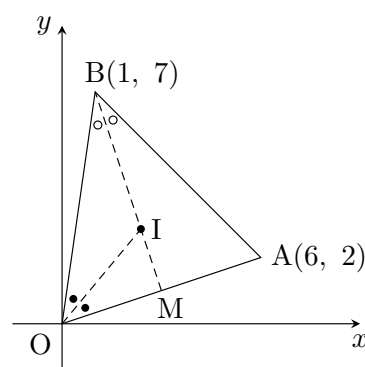
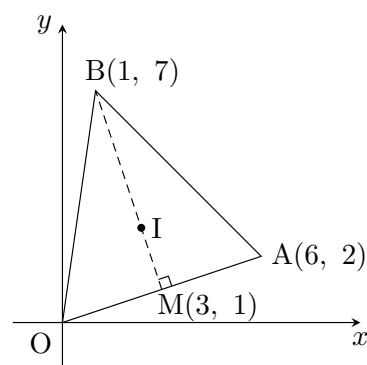
I は三角形 OAB の内心なので、半直線 BI , OI は

それぞれ $\angle OBA$, $\angle AOB$ の二等分線である。

$\angle OBM = \angle ABM$ より

$OM : MA = BO : BA = 5\sqrt{2} : 5\sqrt{2} = 1 : 1$ なので、

M は辺 OA の中点である。よって $M(3, 1)$.



$\angle BOI = \angle MOI$ より

$BI : IM = OB : OM = 5\sqrt{2} : \sqrt{10} = \sqrt{5} : 1$ なので,

$$\begin{aligned}\vec{OI} &= \frac{\vec{OB} + \sqrt{5}\vec{OM}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \left((1, 7) + \sqrt{5}(3, 1) \right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} (3\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} + 7) \\ &= \left(\frac{14 - 2\sqrt{5}}{4}, \frac{-2 + 6\sqrt{5}}{4} \right) = \left(\frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5} - 1}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\text{答} : I \left(\frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

2

(1) S は $A(2, -1, 2)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の球なので、その方程式は

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5 \quad \dots\dots ①$$

(2) $P(a, b, c)$, $|\overrightarrow{OP}| = 1$ より $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \dots\dots ②$

また, $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP} = t(a, b, c) = (ta, tb, tc) \quad (t > 0)$. これを①に代入して,

$$(ta-2)^2 + (tb+1)^2 + (tc-2)^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2 + c^2)t^2 - 2(2a-b+2c)t + 4 = 0$$

これと②より $t^2 - 2(2a-b+2c)t + 4 = 0 \quad \dots\dots ③$

ここで, 半直線 OP が点 Q で S に接するので, t は方程式③の重解である。よって, ③は重解をもつので, ③の判別式 D について,

$$\frac{D}{4} = (2a-b+2c)^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a-b+2c = \pm 2$$

I) $2a-b+2c=2$ のとき ③ $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0$

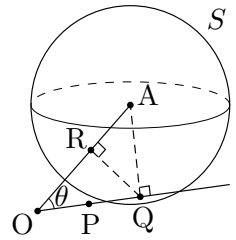
となり, ③は $t=2$ を重解にもつ。これは $t > 0$ を満たすので適する。

II) $2a-b+2c=-2$ のとき ③ $\Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t+2)^2 = 0$

となり, ③は $t=-2$ を重解にもつ。 $t < 0$ より, これは不適。

以上より, $2a-b+2c=2$ かつ $t=2$.

$$(3) \quad \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{2a-b+2c}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$



(4) (i) (2) より $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$ なので, $|\overrightarrow{OQ}| = 2|\overrightarrow{OP}| = 2$. よって,

$$\overrightarrow{OR} = \frac{|\overrightarrow{OQ}| \cos \theta}{|\overrightarrow{OA}|} \overrightarrow{OA} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{3} (2, -1, 2) = \frac{4}{9} (2, -1, 2).$$

したがって, $R\left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

(ii) $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = (2a, 2b, 2c) - \left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right) = \left(2a - \frac{8}{9}, 2b + \frac{4}{9}, 2c - \frac{8}{9}\right)$. よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{RQ} &= 2 \left(2a - \frac{8}{9}\right) - \left(2b + \frac{4}{9}\right) + 2 \left(2c - \frac{8}{9}\right) \\ &= 2(2a-b+2c) - \frac{16+4+16}{9} = 2 \cdot 2 - 4 = 0, \\ |\overrightarrow{RQ}|^2 &= \left(2a - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(2b + \frac{4}{9}\right)^2 + \left(2c - \frac{8}{9}\right)^2 \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{16}{9}(2a-b+2c) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 (2^2 + 1^2 + 2^2) \\ &= 4 \cdot 1 - \frac{16}{9} \cdot 2 + \frac{16}{9} = \frac{20}{9}. \end{aligned}$$

したがって, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{RQ} = 0$, $|\overrightarrow{RQ}| = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

- (1) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2 \left(\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}\right)} = \left|2 \sin \frac{t}{2}\right|.\end{aligned}$$

ここで, $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき, $0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi$ より $2 \sin \frac{t}{2} \geq 0$ なので

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2 \sin \frac{t}{2}$$

である。よって, $0 \leq \theta < \pi$ のとき

$$\ell(\theta) = \int_{\theta}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{\theta}^{\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2}\right]_{\theta}^{\pi} = 4 \cos \frac{\theta}{2}.$$

- (2) (1) より $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 2 \sin \frac{t}{2} \left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}\right)$ であり, $0 < t < 2\pi$ のとき $2 \sin \frac{t}{2} > 0$ なので, $0 < t < 2\pi$ において, $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ と同じ向きの単位ベクトルは $\left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}\right)$ である。さらに, この単位ベクトルの x 成分 $\sin \frac{t}{2}$ は正である。よって, $0 < \theta < \pi$ のとき,

$$\overrightarrow{P_{\theta}Q_{\theta}} = \ell(\theta) \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}\right) = \left(4 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) = (2 \sin \theta, 2(1 + \cos \theta))$$

したがって,

$$\overrightarrow{OQ_{\theta}} = \overrightarrow{OP_{\theta}} + \overrightarrow{P_{\theta}Q_{\theta}} = (\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta) + (2 \sin \theta, 2(1 + \cos \theta)) = (\theta + \sin \theta, 3 + \cos \theta)$$

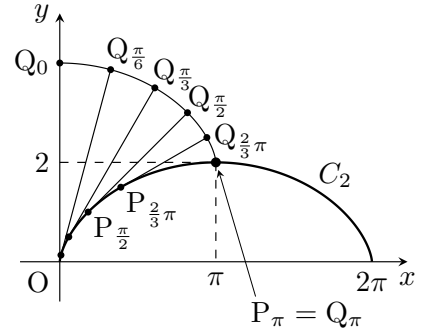
よって, $Q_{\theta}(\theta + \sin \theta, 3 + \cos \theta)$.

- (3) まず, Q_0, Q_{π} の定義から, $Q_{\theta}(\theta + \sin \theta, 3 + \cos \theta)$ は $\theta = 0, \pi$ でも成立する。

C_2 において $t = s + \pi$ ($0 \leq s \leq \pi$) とすると,

$$\begin{aligned}x &= t - \sin t = (s + \pi) - \sin(s + \pi) = s + \pi + \sin s = (s + \sin s) + \pi \\ y &= 1 - \cos t = 1 - \cos(s + \pi) = 1 + \cos s = (3 + \cos s) - 2\end{aligned}$$

よって, C_2 上で $t = s + \pi$ ($0 \leq s \leq \pi$) である点を, $(-\pi, 2)$ だけ移動すると, 点 Q_s に一致する。これが全ての $0 \leq s \leq \pi$ について言えるので, C_2 を $(-\pi, 2)$ だけ平行移動して得られる曲線が D に一致する。



4

$$(1) C_2 : x^2 + y^2 - 2kx + k^2 - 4k - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - k)^2 + y^2 = 4k + 9 \dots\dots\dots ①$$

これが円であるための条件は, $4k + 9 > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{9}{4}$.

$$(2) C_1 : x^2 + y^2 = 1 \dots\dots\dots ②$$

②より, C_1 は原点 $(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円である。

また, ①より C_2 は, $k > -\frac{9}{4}$ のとき, 点 $(k, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{4k + 9}$ の円である。

円 C_1 と円 C_2 の中心間の距離は $|k|$ なので, C_1 と C_2 が異なる 2 つの共有点をもつための必要十分条件は, $k > -\frac{9}{4}$ かつ

$$\left| \sqrt{4k + 9} - 1 \right| < |k| < \sqrt{4k + 9} + 1 \dots\dots\dots ③$$

である。ここで,

$$③ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4k + 9} - 1 < |k| \dots\dots\dots ④ \\ \text{かつ } 1 - \sqrt{4k + 9} < |k| \dots\dots\dots ⑤ \\ \text{かつ } |k| < \sqrt{4k + 9} + 1 \dots\dots\dots ⑥ \end{cases}$$

であり, 条件 $k > -\frac{9}{4}$ のもとで,

$$④ \Leftrightarrow \sqrt{4k + 9} < |k| + 1 \Leftrightarrow 4k + 9 < (|k| + 1)^2 \dots\dots\dots ⑦$$

$$\text{「⑤かつ⑥」} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - |k| < \sqrt{4k + 9} \\ \text{かつ } |k| - 1 < \sqrt{4k + 9} \end{cases} \Leftrightarrow (|k| - 1)^2 < 4k + 9 \dots\dots\dots ⑧$$

である。さらに, ⑧が成立するとき, $4k + 9 > 0$ なので $k > -\frac{9}{4}$ は必ず満たされる。よって, 満たすべき k の条件は

$$\text{「} k > -\frac{9}{4} \text{ かつ ③」} \Leftrightarrow \text{「} k > -\frac{9}{4} \text{ かつ ⑦かつ⑧」} \Leftrightarrow \text{「⑦かつ⑧」}$$

である。さらに,

$$\begin{aligned} \text{「⑦かつ⑧」} &\Leftrightarrow (|k| - 1)^2 < 4k + 9 < (|k| + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2|k| + 1 < 4k + 9 < k^2 + 2|k| + 1 \\ &\Leftrightarrow -2|k| < -k^2 + 4k + 8 < 2|k| \\ &\Leftrightarrow (-k^2 + 4k + 8)^2 < (2|k|)^2 \\ &\Leftrightarrow (k^2 - 4k - 8)^2 - (2k)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \{(k^2 - 4k - 8) + 2k\} \{(k^2 - 4k - 8) - 2k\} < 0 \\ &\Leftrightarrow (k^2 - 2k - 8)(k^2 - 6k - 8) < 0 \\ &\Leftrightarrow (k + 2)(k - 4)\{(k - 3)^2 - 17\} < 0 \\ &\Leftrightarrow (k + 2)(k - 4)\left\{k - (3 + \sqrt{17})\right\}\left\{k - (3 - \sqrt{17})\right\} < 0 \dots\dots\dots ⑨ \end{aligned}$$

ここで, $-2 < 3 - \sqrt{17} < 4 < 3 + \sqrt{17}$ なので, 求める k の値の範囲は, ⑨を解いて

$$-2 < k < 3 - \sqrt{17}, \quad 4 < k < 3 + \sqrt{17}$$

である。

- (3) $k = 10$ のとき $C_2 : (x - 10)^2 + y^2 = 49$ なので、 C_2 は $(10, 0)$ を中心とする半径 7 の円である。
円 C_1, C_2 の両方に接する直線を ℓ とし、 ℓ と C_1 の接点を (a, b) とする。このとき、

$$a^2 + b^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

であり、

$$\ell : ax + by = 1 \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

と表される。この ℓ が C_2 にも接するための条件は、 ℓ と点 $(10, 0)$ との距離が 7 となることである。よって、

$$\frac{|10a + 0 \cdot b - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 7 \Leftrightarrow |10a - 1| = 7 \Leftrightarrow 10a - 1 = \pm 7 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$$

$$a = \frac{4}{5} \text{ のとき, } \textcircled{10} \text{ より } b = \pm \frac{3}{5}. \quad \text{これらを} \textcircled{11} \text{へ代入して, } \frac{4}{5}x \pm \frac{3}{5}y = 1 \Leftrightarrow 4x \pm 3y = 5$$

$$a = -\frac{3}{5} \text{ のとき, } \textcircled{10} \text{ より } b = \pm \frac{4}{5}. \quad \text{これらを} \textcircled{11} \text{へ代入して, } -\frac{3}{5}x \pm \frac{4}{5}y = 1 \Leftrightarrow -3x \pm 4y = 5$$

よって、 C_1, C_2 の両方に接する直線は、 $4x \pm 3y = 5, -3x \pm 4y = 5$ の 4 本である。

<別解> (本解とダブらないように数式番号をつけた)

$$(2) C_1 : x^2 + y^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 2kx + k^2 - 4k - 9 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{1}' - \textcircled{2} \text{ より } -2kx + k^2 - 4k - 9 = -1 \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

ここで $\textcircled{1}' - \textcircled{2} = \textcircled{12}$ なので、 (x, y) が $\textcircled{2}, \textcircled{1}'$ を同時に満たすとき、 $\textcircled{12}$ も成立する。

一方で、 $\textcircled{2} + \textcircled{12} = \textcircled{1}'$ でもあるので、 (x, y) が $\textcircled{2}, \textcircled{12}$ を同時に満たすとき、 $\textcircled{1}'$ も成立する。

したがって、 $\textcircled{2}, \textcircled{1}'$ を同時に満たす点 (x, y) の全体と、 $\textcircled{2}, \textcircled{12}$ を同時に満たす点 (x, y) の全体は一致する。よって、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{12}$ が異なる 2 つの共有点をもつような k の値の範囲を求めればよい。

$$\textcircled{12} \Leftrightarrow 2kx = k^2 - 4k - 8 \dots\dots\dots \textcircled{13} \quad \text{なので、} \textcircled{2} \text{ と } \textcircled{13} \text{ の共有点の個数を考えればよい。}$$

[I] $k = 0$ のとき、 $\textcircled{13} \Leftrightarrow 0 = -8$ となるので、 $\textcircled{13}$ を満たす x は存在しない。

よって、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{13}$ の共有点は存在しない。

$$\text{[II]} \quad k \neq 0 \text{ のとき, } \textcircled{13} \Leftrightarrow x = \frac{k^2 - 4k - 8}{2k} \dots\dots\dots \textcircled{14}$$

$\textcircled{2}$ と $\textcircled{14}$ が異なる 2 つの共有点をもつための条件は、

$$-1 < \frac{k^2 - 4k - 8}{2k} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{k^2 - 4k - 8}{2k} \right)^2 < 1 \Leftrightarrow (k^2 - 4k - 8)^2 < (2k)^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 4k - 8)^2 - (2k)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \{(k^2 - 4k - 8) + 2k\} \{(k^2 - 4k - 8) - 2k\} < 0$$

(以下、本解に同じ)

(3) $k = 10$ のとき, ① $\Leftrightarrow (x - 10)^2 + y^2 = 49$.

よって, C_2 は $(10, 0)$ を中心とする半径 7 の円である。

円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ $O_1(0, 0)$, $O_2(10, 0)$ とおく。

C_1, C_2 の両方に接する直線には, 次の 2 種類がある。

なお, 以下では, C_1, C_2 の両方に接する直線と C_1, C_2 との接点をそれぞれ T_1, T_2 とする。

[I] 右下図の種類のとき, C_1, C_2 の両方に接する直線と x 軸との交点を $A(a, 0)$ とする。

この図において, $\triangle AO_1T_1$ と $\triangle AO_2T_2$ は相似なので,

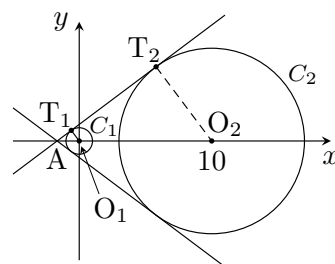
$$\begin{aligned} AO_1 : AO_2 &= O_1T_1 : O_2T_2 \\ \Leftrightarrow (0 - a) : (10 - a) &= 1 : 7 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

よって, $A\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$.

また, $AO_1 = \frac{5}{3}$, $O_1T_1 = 1$, $\angle O_1T_1A = 90^\circ$ より
 $AT_1 = \frac{4}{3}$. よって, 直線 AT_1 の傾きは $\pm \frac{O_1T_1}{AT_1} = \pm \frac{3}{4}$

したがって, このとき, C_1, C_2 の両方に接する直線の方程式は

$$y = \pm \frac{3}{4} \left(x + \frac{5}{3} \right) \Leftrightarrow y = \pm \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \right).$$



[II] 右下図の種類のとき, C_1, C_2 の両方に接する直線と x 軸との交点を $B(b, 0)$ とする。

この図において, $\triangle BO_1S_1$ と $\triangle BO_2S_2$ は相似なので,

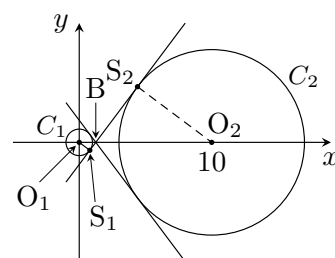
$$\begin{aligned} BO_1 : BO_2 &= O_1S_1 : O_2S_2 \\ \Leftrightarrow (b - 0) : (10 - b) &= 1 : 7 \Leftrightarrow b = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

よって, $B\left(\frac{5}{4}, 0\right)$.

また, $BO_1 = \frac{5}{4}$, $O_1S_1 = 1$, $\angle O_1S_1B = 90^\circ$ より
 $BS_1 = \frac{3}{4}$. よって, 直線 BS_1 の傾きは $\pm \frac{O_1S_1}{BS_1} = \pm \frac{4}{3}$

したがって, このとき, C_1, C_2 の両方に接する直線の方程式は

$$y = \pm \frac{4}{3} \left(x - \frac{5}{4} \right) \Leftrightarrow y = \pm \left(\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \right).$$



以上より, C_1, C_2 の両方に接する直線は, 次の 4 本である。

$$y = \pm \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \right), \quad y = \pm \left(\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \right)$$

5 $L = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ である。

(1) L 個ある変数 x のデータのうち、

1 が n 個数, 2 が $n-1$ 個数, $\dots$, n が 1 個,

一般に, k が $n+1-k$ 個 ($k=1, 2, \dots, n$)

ある。よって, これらの平均値 $\bar{x}$ は,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cdot k = \frac{2}{n(n+1)} \left\{ (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right\} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left\{ (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= (n+1) - \frac{1}{3}(2n+1) = \frac{1}{3}(n+2).\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に考えて, 変数 x^2 の平均値 $\overline{x^2}$ は

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cdot k^2 = \frac{2}{n(n+1)} \left\{ (n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 \right\} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left[(n+1) \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \right] \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}(n+1) \{2(2n+1) - 3n\} \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

よって, x の分散 s_x^2 は

$$\begin{aligned}s_x^2 &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2) - \left\{ \frac{1}{3}(n+2) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{18}(n+2) \{3(n+1) - 2(n+2)\} = \frac{1}{18}(n+2)(n-1).\end{aligned}$$

(3) 2 つの変数 x, y の対称性から, 変数 y の平均値 $\bar{y}$ についても $\bar{y} = \bar{x} = \frac{1}{3}(n+2)$ である。

ここで, $k=1, 2, \dots, n$ について,

「 x の値が $n+1-k$ 」のとき, 「 y の取り得る値は $1, 2, \dots, k$ のいずれか」

である。よって, 「 x の値が $n+1-k$ のときの $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ の値の和」は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \{(n+1-k) - \bar{x}\} (i - \bar{y}) &= \left\{ (n+1-k) - \frac{1}{3}(n+2) \right\} \sum_{i=1}^k \left\{ i - \frac{1}{3}(n+2) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{3}(2n+1) - k \right\} \left\{ \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{3}(n+2)k \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{3}(2n+1) - k \right\} \cdot \frac{1}{2}k \left\{ (k+1) - \frac{2}{3}(n+2) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{3}(2n+1) - k \right\} \cdot \frac{1}{2}k \left\{ k - \frac{1}{3}(2n+1) \right\} \\ &= -\frac{1}{2}k \left\{ k - \frac{1}{3}(2n+1) \right\}^2\end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}
s_{xy} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{2} k \left\{ k - \frac{1}{3}(2n+1) \right\}^2 \right] \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n \left[k^3 - \frac{2}{3}(2n+1)k^2 + \left\{ \frac{1}{3}(2n+1) \right\}^2 k \right] \\
&= -\frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{2}{3}(2n+1) \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{9}(2n+1)^2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \right] \\
&= -\frac{1}{36} \{ 9n(n+1) - 4(2n+1)^2 + 2(2n+1)^2 \} = -\frac{1}{36} \{ 9(n^2+n) - 2(2n+1)^2 \} \\
&= -\frac{1}{36} (n^2+n-2) = -\frac{1}{36} (n+2)(n-1)
\end{aligned}$$

(4) 2つの変数 x, y の対称性から, 変数 y の分散 s_y^2 についても $s_y^2 = s_x^2 = \frac{1}{18}(n+2)(n-1)$ が成立する。よって,

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}} = \frac{-\frac{1}{36}(n+2)(n-1)}{\sqrt{\left\{ \frac{1}{18}(n+2)(n-1) \right\}^2}} = \frac{-\frac{1}{36}(n+2)(n-1)}{\frac{1}{18}(n+2)(n-1)} = -\frac{1}{2}.$$